ECOLE POLYTECHNIQUE — OPTION P'

CONCOURS D'ADMISSION 1981

## DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES ( 4 heures )

Dans tout le problème, l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ est muni de sa base canonique et du produit scalaire euclidien défini pour tout $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ et tout $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ par $(x \mid y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$. Tout sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ est appelé hyperplan. Pour tout vecteur non nul $x \in \mathbb{R}^n$, on appelle orthogonal de $x$, noté $x^\perp$, l'hyperplan constitué des vecteurs orthogonaux à $x$. De plus, grâce à la structure euclidienne, on identifie $\mathbb{R}^n$ à son dual par la bijection qui applique sur la base canonique sa propre base duale, ce qui conduit à identifier aussi l'application transposée d'un endomorphisme quelconque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ à un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ noté ${}^t f$ et appelé transposé de $f$.

Enfin, on convient que les vecteurs propres envisagés seront tous non nuls et on rappelle que, puisque $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel, seules les valeurs propres *réelles* éventuelles d'un endomorphisme $f$ seront prises en considération.

**I** 1 - Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer :

a - que $f$ et ${}^t f$ ont même polynôme caractéristique ;

b - que les sous-espaces propres de $f$ et de ${}^t f$ relatifs à une valeur propre commune à ces deux endomorphismes ont même dimension.

2 - Montrer que les orthogonaux des vecteurs propres de ${}^t f$ sont les hyperplans stables par $f$.

3 - a - Montrer que si $x$ est un vecteur propre de $f$ associé à une valeur propre $\lambda$ et si $y$ est un vecteur propre de ${}^t f$ associé à une valeur propre $\mu \neq \lambda$, alors $x$ et $y$ sont orthogonaux.

b - Montrer par un exemple qu'un vecteur propre $x$ de $f$ et un vecteur propre $y$ de ${}^t f$ peuvent être orthogonaux même s'ils sont associés à la même valeur propre $\lambda$.

c - Soit $\lambda$ une valeur propre de $f$ dont l'ordre de multiplicité est égal à la dimension du sous-espace propre $E$ qui lui est associé. Montrer que les vecteurs propres de ${}^t f$ associés à $\lambda$ ne sont pas orthogonaux au sous-espace $E$.

4 - On suppose dans cette question que $f$ admet une famille libre $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ de $n-1$ vecteurs propres, associés respectivement à des valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ distinctes ou non. Soit $D$ l'intersection des orthogonaux $x_i^\perp$ des vecteurs $x_i$ $(i=1,\ldots,n-1)$. Montrer que $D$ est incluse dans un sous-espace propre de ${}^t f$, et qu'en notant $\mu$ la valeur propre qui lui est associée, $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, \mu$ sont exactement les racines du polynôme caractéristique de $f$.

**II** Soit $\lambda$ une valeur propre d'un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. S'il existe un entier $k \geqslant 1$, un sous-espace $P_k$ du sous-espace propre associé à $\lambda$, et un sous-espace $E_{n-k}$, de dimension $n-k$, stable par $f$, et supplémentaire de $P_k$ dans $\mathbb{R}^n$, on dit que $\lambda$ est une valeur propre *séparable* de $f$ ; le plus grand des entiers $k$ vérifiant ces conditions s'appelle *ordre de séparation* de $\lambda$.

.../...

1 - On suppose que la valeur propre $\lambda$ est d'ordre de multiplicité $\geqslant 2$, et que le sous-espace propre qui lui est associé est de dimension 1 ; montrer que $\lambda$ n'est pas séparable.

2 - On suppose au contraire que la dimension du sous-espace propre associé à $\lambda$ est égale à l'ordre de multiplicité $m$ de $\lambda$ ; montrer que $\lambda$ est séparable et que son ordre de séparation est $m$.

3 - On suppose dans cette question que $n$ est au moins égal à 3, que $\lambda$ est une valeur propre de $f$ d'ordre de multiplicité égal à la dimension $n$ de l'espace, et que le sous-espace propre associé à $\lambda$ est de dimension $n-1$.

a - Montrer que $\lambda$ est séparable, avec $n-2$ pour ordre de séparation.

b - Montrer que la matrice de $f$ est semblable à une matrice à éléments tous nuls à l'exception de l'avant-dernier élément de la dernière colonne, égal à 1 et, si $\lambda \neq 0$, des éléments de la diagonale principale, tous égaux à $\lambda$.

4 - Etablir que l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ représenté dans la base canonique par la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'a aucune valeur propre séparable.

III - Dans cette question, on suppose que $n = 2$ et que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ n'est pas une homothétie.

a - Discuter, suivant le nombre et l'ordre de multiplicité des valeurs propres de $f$, le nombre des sous-espaces propres de $f$ et comparer ceux-ci aux hyperplans (ici, droites vectorielles) stables par $f$.

b - Donner par sa matrice un exemple d'endomorphisme $f$ admettant une et une seule droite stable à laquelle appartienne le premier vecteur de base.

2 - Dans cette question, on suppose que $n = 3$ et que $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ n'admet pas de valeur propre triple.

a - Discuter, suivant le nombre et l'ordre de multiplicité des valeurs propres de $f$, le nombre et les dimensions des sous-espaces propres de $f$ et la répartition des hyperplans (ici, plans vectoriels) stables par $f$ ; établir dans chaque cas la liste des inclusions de sous-espaces propres dans des plans stables, en signalant le (ou les) cas où aucune telle inclusion ne se produit.

b - Donner par sa matrice un exemple d'endomorphisme $f$ admettant deux droites propres et deux seulement, auxquelles appartiennent respectivement les deux premiers vecteurs de la base.

XXXXX

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes




Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail